ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2004, том 44, № 12, с. 2121–2127

УДК 519.6:517.518.36

# О РЕАЛИЗАЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ НАД РЯДАМИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ[1)]

**© 2004 г. А. Н. Панкратов**

*(142290 Пущино, М.о., ул. Институтская, 4, Ин-т матем. проблем биологии РАН)*
*e-mail: pan@impb.psn.ru*

Поступила в редакцию 12.12.2003 г.
Переработанный вариант 01.07.2004 г.

Рассматриваются вопросы обобщенного спектрально-аналитического метода, связанные с реализацией алгебраических операций над ортогональными рядами: умножение, деление и извлечение квадратного корня. Рассматриваются два способа определения оператора умножения на функцию, действующего в пространстве коэффициентов разложения. Показано, что коммутативное кольцо функций из конечномерного подпространства гильбертова пространства $L_2$ изоморфно кольцу коммутирующих симметричных матриц, на основании чего алгебра рядов может быть сведена к алгебре матриц. Приведены формулы для ортогональных многочленов Чебышёва I рода. Библ. 9.

**Ключевые слова:** оператор умножения на функцию, ортогональные ряды, многочлены Чебышёва.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Алгебраические операции над ортогональными рядами являются одним из примеров аналитических преобразований, которые можно проводить над ортогональными рядами в рамках обобщенного спектрально-аналитического метода [1]. Согласно общей методологии, коэффициенты результирующего ряда при аналитических преобразованиях выражаются аналитически через коэффициенты исходных рядов. В данной работе дано подробное исследование операции умножения рядов. Это исследование необходимо для реализации более сложных операций деления и извлечения квадратного корня.

Рассматриваемые алгебраические операции не накладывают ограничений на используемую систему ортогональных функций. Аналитические свойства того или иного базиса определяют конкретный вид преобразований в пространстве коэффициентов разложения, а не возможность проведения самих преобразований. Поэтому сначала вопрос о выполнении этих преобразований исследуется чисто теоретически для произвольной системы ортогональных функций. Затем в качестве примера выводятся формулы для полиномов Чебышёва, которые могут быть применены непосредственно на практике.

Следует отметить выбор полиномов Чебышёва в качестве одного из самых простых базисов с точки зрения выполнения рассматриваемых в статье операций. Аналитические операции над рядами полиномов Чебышёва имеются, например, в таком общем пакете численных процедур, как Numerical Recipes [2]. В этом пакете реализованы дифференцирование и интегрирование рядов, а также преобразования между степенным и ортогональным рядами. Операция умножения есть в пакете процедур [3], посвященном непосредственно полиномам Чебышёва. В этот пакет входит также процедура решения краевых задач для линейного обыкновенного дифференциального уравнения $n$-го порядка. В работе [4] выведены формулы перемножения функций, построенных на основе обобщенных полиномов Лагерра, затем эти формулы применены к решению нелинейного дифференциального уравнения.

Постановке и решению задачи о вычислении рациональных степеней ряда посвящены работы [5], [6]. В них показано, что нахождение произвольной рациональной степени ряда может быть сведено к выполнению операций умножения и сложения рядов. Приведенные там схемы являются итерационными и опираются на операции сложения и умножения рядов. Подход, использованный в этих работах, является достаточно общим и равно применим к объектам любой природы, для которых определены операции сложения и умножения, например к матрицам, так

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 01-02-16127).

же как и к рядам. В настоящей работе используется другой подход, связанный с изучением пространства коэффициентов разложения и учетом свойств ортогональных рядов. Полученные результаты справедливы для произвольных ортогональных базисов, а для конкретных ортогональных систем могут быть дополнительно развиты, как это продемонстрировано на примере ортогональных многочленов Чебышёва.

## 2. ПРОСТРАНСТВО КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим ортогональные ряды вида

$$a(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k T_k(x), \tag{1}$$

где $a_k$ – коэффициенты разложения, а $T_k(x)$ – система ортогональных и нормированных функций в смысле скалярного произведения, включающего некоторую весовую функцию $\rho(x) > 0$:

$$(a(x), b(x)) = \int_{-1}^{1} a(x)b(x)\rho(x)dx. \tag{2}$$

Условие ортонормированности системы имеет вид

$$(T_i(x), T_j(x)) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{3}$$

В пространстве коэффициентов разложения скалярное произведение (2) приобретает следующий вид:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i b_i, \tag{4}$$

где через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ обозначаются векторы коэффициентов разложения функций $a(x)$ и $b(x)$ соответственно. Заметим, что в случае бесконечных рядов ($N = \infty$) равенство скалярных произведений (2) и (4) следует из условия полноты системы функций $T_k(x)$ (см. [7]).

Составим почленное произведение двух разложений:

$$c(x) = a(x)b(x) = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} a_i b_j T_i(x) T_j(x). \tag{5}$$

Произведение базисных функций раскладывается, вообще говоря, в бесконечный ряд по этой же системе функций:

$$T_i(x)T_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{ijk} T_k(x).$$

Коэффициенты результирующего ряда будут билинейными формами коэффициентов исходных рядов:

$$c_k = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} \delta_{ijk} a_i b_j. \tag{6}$$

Коэффициенты этих билинейных форм являются интегралами от тройных произведений базисных функций:

$$\delta_{ijk} = \int_{-1}^{1} T_i(x)T_j(x)T_k(x)\rho(x)dx. \tag{7}$$

Величина $\delta_{ijk}$ является основной для определения правила преобразования коэффициентов при умножении ортогональных рядов и определяется выбранным базисом. Заметим, что значение символа $\delta_{ijk}$ не меняется от перестановки индексов. В случае классических ортогональных многочленов $\delta_{ijk} = 0$, если сумма двух индексов меньше третьего индекса: $i + j < k$.

Зафиксируем функцию $b(x)$ и обозначим заглавной буквой $B$ оператор умножения на эту функцию в пространстве коэффициентов разложения. Тогда выражение (6) примет вид

$$c_k = \sum_{i=0}^{N-1} B_{ki} a_i, \tag{8}$$

или в матричной форме $\mathbf{c} = B\mathbf{a}$, где коэффициенты матрицы оператора $B$ имеют вид

$$B_{ki} = \sum_{j=0}^{N-1} \delta_{ijk} b_j. \tag{9}$$

Из (6) составим уравнения для коэффициентов разложения квадрата ряда

$$c_k = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_i a_j \delta_{ijk}. \tag{10}$$

Рассмотрим две обратные задачи: по известному вектору коэффициентов $c$ найти коэффициенты $a$, что будет соответствовать делению функций $a(x) = c(x)/b(x)$ в случае линейной системы (8) и нахождению квадратного корня $a(x) = \sqrt{c(x)}$ в случае системы квадратичных уравнений (10). Заметим, что эти системы в общем случае бесконечны. Вопрос о разрешимости конечной подсистемы системы (8) при $k = 0, 1, \ldots, N - 1$ требует изучения свойств матрицы оператора умножения на функцию (9).

**Утверждение 1.** *Матрица оператора умножения на функцию является симметричной.*

**Доказательство** непосредственно следует из определения (9) и симметричности символа $\delta_{ijk}$. Заметим, что существенным требованием является нормировка базиса, в котором этот оператор рассматривается. Для ортогонального, но ненормированного базиса это утверждение несправедливо. Утверждение доказано.

**Утверждение 2.** *Матрица оператора умножения на функцию положительно определена* ($B > 0$), *если порождающая ее функция положительна*: $b(x) > 0$.

**Доказательство** следует из рассмотрения следующего скалярного произведения:

$$(a(x)b(x), a(x)) = (B\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \int_{-1}^{1} b(x) a^2(x) \rho(x) dx.$$

Скалярное произведение записано сначала в пространстве коэффициентов разложения, а затем в функциональном пространстве. Если функция $b(x)$ имеет постоянный знак на всем отрезке интегрирования, то знак интеграла, а вместе с ним и бесконечной квадратичной формы $(B\mathbf{a}, \mathbf{a})$ строго определен при любом выборе $\mathbf{a}$. Если первые $N$ компонент вектора $\mathbf{a}$ ненулевые, а остальные равны нулю, то выражение $(B\mathbf{a}, \mathbf{a})$ становится конечной квадратичной формой с конечной матрицей $B$. Утверждение доказано.

**Теорема.** *Собственные значения матрицы оператора умножения на функцию ограничены максимальным и минимальным значениями функции, порождающей этот оператор.*

**Доказательство.** Оператор умножения на функцию, принимающую постоянное значение $d$, имеет диагональный вид $D = d \times I$, где $I$ – единичная матрица со значением $d$, стоящим на главной диагонали. Предположим, что исследуемая функция $b(x)$ имеет максимальное $b_{\max}$ и минимальное $b_{\min}$ значения и порождает оператор умножения $B$ согласно (9). Тогда функции $b(x) - b_{\min} \geq 0$ соответствует оператор $(B - b_{\min} \times I) \geq 0$. Отсюда следует, что все собственные значения матрицы $B$ не меньше $b_{\min}$. Аналогично доказывается, что все собственные значения матрицы $B$ не больше $b_{\max}$. Теорема доказана.

Доказанные утверждения и теорема дают основание к решению линейной системы (8). Утверждение 2 и теорема дают возможность оценить, когда эта система разрешима и какую она имеет обусловленность. Условие постоянства знака функции согласуется с тем, что деление на функцию, обращающуюся в некоторой точке интервала в нуль, является недопустимым. Деление на функцию, близкую к нулю, приводит к плохой обусловленности линейной системы (8). Другой важный вывод состоит в том, что решение системы (8) можно проводить итерационным методом Зейделя, так как симметричность и знакоопределенность матрицы является достаточным условием сходимости этого метода при любом начальном приближении [8]. Для решения квадратичной системы (10) можно также использовать метод Зейделя.

## 3. ПРОСТРАНСТВО СЕТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Пространство функций, интегрируемых с квадратом, а также его конечномерные подпространства, вообще говоря, не являются замкнутыми по отношению к умножению составляющих их элементов. Результат умножения элементов некоторого подпространства в общем случае принадлежит всему бесконечномерному пространству и может вообще не являться элементом гильбертова пространства. Из этого следует, что операторы умножения на функцию (9) в конечномерном подпространстве не являются коммутирующими. Цель настоящего раздела – введение операции умножения в конечномерном пространстве таким образом, чтобы это пространство являлось коммутативным кольцом по отношению к операциям сложения и умножения.

Рассмотрим конечномерное подпространство пространства $L_2$, образованное линейными комбинациями (1). Такое пространство изоморфно пространству сеточных функций той же размерности. Для классических ортогональных многочленов и функций этот изоморфизм обеспечивается квадратурной формулой Гаусса, позволяющей интеграл скалярного произведения заменить суммой на неравномерной сетке, состоящей из нулей $x_j$ ортогонального многочлена степени $N$ (см. [9]):

$$(a(x), b(x)) = \int_{-1}^{1} a(x)b(x)\rho(x)dx = \sum_{j=1}^{N} a(x_j)b(x_j)w_j; \tag{11}$$

здесь знак равенства между суммой и интегралом имеет место, когда функция $a(x)b(x)$ является полиномом степени не выше $2N - 1$, что заведомо выполняется, если $a(x)$ и $b(x)$ – полиномы степени не выше $N - 1$.

В пространстве сеточных функций оператор умножения имеет простейший диагональный вид. Собственными значениями этого оператора являются значения функции в узлах сетки.

Построим оператор умножения на функцию в пространстве коэффициентов разложения с использованием оператора умножения на функцию в пространстве сеточных функций. Пусть $M$ – оператор умножения на функцию в пространстве сеточных функций. Обозначим через $T$ матрицу с элементами $T_{ij} = T_i(x_j)$, где $x_j$ – узлы квадратурной формулы Гаусса; $T^*$ – транспонированная матрица; $W$ – диагональная матрица с весами квадратурной формулы Гаусса $w_j$ на диагонали. Тогда искомый оператор можно записать в виде композиции:

$$T \times W \times M \times T^*. \tag{12}$$

Эта композиция включает в себя последовательное (справа налево) применение следующих преобразований:

1) оператор $T^*$ обеспечивает вычисление значения ряда в точках сетки, т.е. преобразование $N$-мерного вектора коэффициентов разложения в $N$-мерный вектор значений сеточной функции;

2) оператор $M$ задает умножение функции в узлах сетки на сеточную функцию, представленную этим оператором;

3) оператор $T \times W$ обеспечивает вычисление коэффициентов разложения посредством квадратурной формулы Гаусса, т.е. обратное преобразование из пространства сеточных функций в пространство коэффициентов разложения.

Рассмотрим произведение двух операторов вида (12):

$$TWM_1T^*TWM_2T^* = TWM_1(T^*TW)M_2T^* = TWM_1M_2T^*.$$

Это равенство доказывает коммутативность умножения таких операторов, поскольку операторы $TW$ и $T^*$ являются взаимно обратными ($TWT^* = I$ в силу условия ортонормированности базиса (3) и квадратурной формулы Гаусса (11)).

Таким образом, имеем взаимно однозначное соответствие операторов (12), действующих в пространстве коэффициентов разложения, и сеточных функций. Оператор (12) дает альтернативное определение операции умножения в подпространстве гильбертова пространства фиксированной размерности $N$. Построение этого оператора не требует знания аналитических свойств базиса, а только узлов и весов квадратурной формулы Гаусса. Поэтому такой метод построения оператора умножения на функцию может быть назван методом квадратурной дискретизации. Заметим, что среди классических ортогональных многочленов только для многочленов Чебышёва I и II рода нули многочленов известны в аналитическом виде, поэтому такое построение оператора умножения на функцию в общем случае является численным.

## 4. ФОРМУЛЫ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЁВА

Многочлены Чебышёва имеют явное тригонометрическое выражение:

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x), \quad -1 \le x \le 1.$$

Значения многочленов могут быть вычислены более рационально по рекуррентному соотношению

$$T_0 = 1, \quad T_1 = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n - T_{n-1}, \quad n \ge 1.$$

Коэффициенты разложения функции $a(x)$ вида (1) по полиномам Чебышёва находятся по следующим квадратурным формулам:

$$a_j = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} a(x_k)T_j(x_k), \tag{13}$$

где узлы интегрирования совпадают с нулями полинома Чебышёва $T_N(x)$:

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi(k-1/2)}{N}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

При этом $j = 0, 1, \ldots, m-1$ и $m \le N$. В результате преобразования (13) получается разложение, в котором нулевой коэффициент имеет удвоенное значение:

$$a(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} a_k T_k(x). \tag{14}$$

Непосредственно из формулы произведения косинусов

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

следует формула для разложения произведения двух полиномов Чебышёва:

$$T_iT_j = \frac{1}{2}T_{|i-j|} + \frac{1}{2}T_{i+j}. \tag{15}$$

На основе этой формулы и формулы (5) попарного произведения членов двух рядов можно предложить следующий алгоритм вычисления произведения. Каждая пара $a_ib_j$ вносит аддитивный вклад в два коэффициента результирующего ряда $c_{|i-j|}$ и $c_{i+j}$ с множителем 1/2. Для произведения двух рядов, состоящих из $m$ членов, потребуется $m^2 + m$ операций умножения и $2m^2$ операций сложения.

Для получения явных выражений для коэффициентов разложения произведения перемножим почленно два бесконечных ряда вида (14), применим формулу (15) и соберем коэффициенты при одинаковых полиномах:

$$c_k = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k} a_jk_{k-j} + \frac{1}{2}\sum_{j=k+1}^{\infty}(a_jb_{j-k} + a_{j-k}b_j). \tag{16}$$

Для примера, при $m = 5$ матрицы билинейных форм (16) для $k = 0$ и $k = 2$ имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перепишем билинейную форму (16) в виде линейной системы относительно неизвестного вектора коэффициентов $\mathbf{a}$:

$$c_k = \frac{1}{2}a_0 b_k + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} a_j(b_{|j-k|} + b_{j+k}).$$

Рассмотрим решение этой системы методом Зейделя. Идея итерационного метода Зейделя состоит в том, что каждое уравнение системы решается как уравнение одного неизвестного независимо от других уравнений системы. Найденное значение для компоненты вектора берется за новое приближение и учитывается в других уравнениях системы. Таким образом, переходя от одного уравнения к другому, последовательно уточняем компоненты вектора коэффициентов разложения.

Разрешим уравнение (16) относительно неизвестного $a_k$ следующим образом:

$$a_k = \frac{1}{b_0}\left(2c_k - \sum_{j=0}^{k-1} a_j b_{k-j} - \sum_{j=k+1}^{m-1}(a_j b_{j-k} + a_{j-k} b_j)\right). \tag{17}$$

Заметим, что коэффициент $b_0$ не может обращаться в нуль в силу знакоопределенности функции $b(x)$. Выбор начального приближения для уравнений (17) может быть произвольным, так как сходимость итерационного процесса обеспечена при любом начальном приближении.

Аналогично разрешается система квадратичных уравнений

$$\begin{aligned} a_0 &= \sqrt{2\left(c_0 - \sum_{j=1}^{m-1} a_j^2\right)}, \\ a_k &= \frac{1}{a_0}\left(c_k - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} a_j a_{k-j} - \sum_{j=k+1}^{m-1} a_j a_{j-k}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Сходимость итерационного процесса (18) теоретически не обоснована. Выбор начального приближения для уравнений (18) должен быть достаточно близким, чтобы коэффициент $a_0$ не обращался в нуль, а значение подкоренного выражения в (18) было больше нуля. Предложенные процедуры были протестированы с помощью компьютерных расчетов. Очевидно, они наиболее эффективны и рациональны в тех задачах, где, по постановке, необходимо применять операции деления или извлечения корня к серии мало меняющихся функций, например в задачах продолжения функций по параметрам.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе показано, что одним из способов реализации алгебраических операций над ортогональными рядами может быть сведение их к алгебраическим операциям над матрицами. Такой подход основывается на введении оператора умножения на функцию, действующего в пространстве коэффициентов разложения, и имеет ряд достоинств:

1) достаточно определить оператор умножения на функцию, после чего осуществление алгебраических операций не зависит от выбранного базиса;

2) алгоритмы преобразования рядов, записанные в матричном виде, удобны для исполнения векторными и параллельными вычислительными системами;

3) оператор умножения наряду с операторами дифференцирования и интегрирования можно использовать для решения дифференциальных и интегральных уравнений.

Было показано, что теоретически есть два неэквивалентных способа определения операции умножения в конечномерном подпространстве гильбертова пространства: способ (9) является аналитическим, а способ (12) – численным и основан на квадратурной дискретизации функций.

Автор благодарен Ф.Ф. Дедусу и С.А. Махортых за постановку задачи и обсуждение результатов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дедус Ф.Ф., Махортых С.А., Устинин М.Н., Дедус А.Ф.* Обобщенный спектрально-аналитический метод обработки информационных массивов. Задачи анализа изображений и распознавания образов. М.: Машиностр., 1999.
2. *Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P.* Numerical recipes in C: the art scientific computing. Cambridge: Univ. Press, 1992. 2nd ed.
3. *D'Aguanno B., Nobile A., Roman E.* CHPACK: A package for the manipulation of Chebyshev approximations // Comput. Phys. Communs. 1983. V. 29. P. 361–374.
4. *Khabibrakhmanov I.K., Summers D.* The use of generalized Laguerre polynomials in spectral methods for nonlinear differential equations // Comput. Math. Applic. 1998. V. 36. № 2. P. 65–70.
5. *Broucke R.* Construction of rational and negative powers of a formal series // Communs ACM. 1971. V. 14. № 1. P. 32–35.
6. *Broucke R.* A446-Ten subroutines for the manipulation of Chebyshev series // Communs ACM. 1973. V. 16. № 4. P. 254–256.
7. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1951.
8. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
9. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984.