задача 1

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x+1)^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-x-1} = -\frac{1}{x}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x+1)^k = -\frac{1}{x} - 1$$

$|q| < 1$

$|x+1| < 1$

$-2 < x < 0$

$\begin{cases} x+1 \geqslant 0 \\ x+1 < 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x+1 < 0 \\ -x-1 < 1 \end{cases}$

$0 \leqslant x+1 < 1$

$-1 \leqslant x < 0$

$-1 < x+1 < 0$

$-2 < x < -1$

числовая ось, т.а, ϵ – окрестность точки (шар)

$|x - a| < \epsilon$

$a - \epsilon < x < a + \epsilon$

задача 2

x^2 в окр т .1

по степеням $(x-1)$

$$x^2 = ((x-1)+1)^2 = (x-1)^2 + 2(x-1) + 1 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 + 0(x-1)^3 + \ldots$$

ряд Тейлора

$$x^2 = 1 + 2(x-1) + \frac{2}{2}(x-1)^2 + 0(x-1)^3 + \ldots$$

задача 3

$$f[x] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k^3 x^k$$

$\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)^3}{k^3} = \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}{k^3} = 1 + \frac{3}{k} + \frac{3}{k^2} + \frac{1}{k^3} \to 1 = L$$

$|x| < 1/L = 1$ абсолютно сходится

$|x| \geqslant 1$ расходится, поскольку общий член ряда не стремится к нулю

задача 5

$f = x^2 + y^2 + x + y + xy$

$(f')_x = 2x + 1 + y = 0$

$(f')_y = 2y + 1 + x = 0$

$1 + 3y = 0$

$1 + 3x = 0$

$x = y = -\frac{1}{3}$

$$f(x, y) = \left(x + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(y + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(x + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)\left(y + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} + \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(y + \frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(-2 \times \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) = 0$$

седловая

задача 4

$x^2 + x + 1$ на [-1, 1] в ряд Фурье

ряд Фурье [-π, π] [-l, l] [0, 1] [a, b]

{Cos[nx], Sin[nx]} [-π, π] [0, 2π]
косинус синус

$\{\mathrm{Cos}[n \frac{\pi t}{l}], \mathrm{Sin}[n \frac{\pi t}{l}]\}$ [-l, l];
косинус синус

$\frac{\pi t}{l} = x$

{Cos[nπ (2 s - 1)], Sin[nπ (2 s - 1)]} [0, l];
косинус синус

$-\pi + 2\pi s = \pi(2s - 1) = x$

In[1]:= $a_n = \int_{-1}^{1} (x^2 + x + 1) \underbrace{\text{Cos}\ (n\pi x)}_{\text{косинус}}\, dx =$

$\frac{1}{n\pi}(x^2 + x + 1) \underbrace{\text{Sin}\ (n\pi x)}_{\text{синус}} \Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{1} \underbrace{\text{Sin}\ (n\pi x)}_{\text{синус}} (2x + 1)\, dx =$

$= \frac{1}{n^2\pi^2}\int_{-1}^{1} (2x + 1)\, d\underbrace{\text{Cos}[n\pi x]}_{\text{косинус}} =$

$= \frac{1}{n^2\pi^2}(2x + 1) \underbrace{\text{Cos}[n\pi x]}_{\text{косинус}} \Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{n^2\pi^2}\int_{-1}^{1} \underbrace{\text{Cos}[n\pi x]}_{\text{косинус}}\, 2\, dx =$

$= \frac{1}{n^2\pi^2}(2x + 1) \underbrace{\text{Cos}[n\pi x]}_{\text{косинус}} \Big|_{-1}^{1} - \frac{2\,\text{Sin}[n\pi x]}{n^3\pi^3} \Big|_{-1}^{1} =$

$= \frac{1}{n^2\pi^2}(2x + 1) \underbrace{\text{Cos}[n\pi x]}_{\text{косинус}} \Big|_{-1}^{1} = \frac{3}{n^2\pi^2}\underbrace{\text{Cos}[n\pi]}_{\text{косинус}} + \frac{1}{n^2\pi^2}\underbrace{\text{Cos}[-n\pi]}_{\text{косинус}} =$

$= \frac{4}{n^2\pi^2}\underbrace{\text{Cos}[n\pi]}_{\text{косинус}} = \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n$

$a_0 = \int_{-1}^{1}(x^2 + x + 1)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right) \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{-1}{3} - \frac{1}{2} - (-1) = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$